PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Groupe d'automorphismes sur l'algèbre stellaire des systèmes sur un réseau, induits par une interaction.* Note (*) de MM. **Jean-François Gille**, **Jérôme Manuceau** et **Alain Messager**, présentée par M. Alfred Kastler.

Nous montrons que toute interaction, d'un système sur un réseau, induit un groupe d'automorphismes.

1. Généralités. — $\mathbf{Z}$ sera le groupe des entiers relatifs, ν un entier naturel. $\mathbf{Z}^\nu$ est appelé « réseau de dimension ν ». A chaque point du réseau, on associe une algèbre stellaire simple $\mathfrak{A}$, contenant une unité (pour décrire un système d'électrons on prendra pour $\mathfrak{A}$ l'algèbre engendrée par les matrices de Pauli). L'algèbre involutive associée au réseau est $\mathcal{F} = \bigotimes_{x \in \mathbf{Z}^\nu} \mathfrak{A}_x$, où $\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}$ pour tout x de $\mathbf{Z}^\nu$. Si $\alpha \in \mathfrak{A}$ et $x \in \mathbf{Z}^\nu$, on note α_x l'élément $\bigotimes_{y \in \mathbf{Z}^\nu} a^y$, où a^y est l'identité de $\mathfrak{A}$ si $y \neq x$ et $a^x = \alpha$. L'algèbre $\mathcal{F}$ appelée « algèbre locale », est engendrée par les combinaisons linéaires finies de produits finis d'éléments α_x.

Il n'existe qu'une seule norme d'algèbre stellaire

$$(\|\gamma^*\gamma\| = \|\gamma\|^2, \ \forall \gamma \in \mathcal{F}) \quad \text{sur } \mathcal{F}.$$

La complétion de $\mathcal{F}$ par rapport à cette norme est une algèbre stellaire notée $\overline{\mathcal{F}}$ et appelée « algèbre quasi-locale ».

A tout $a \in \mathbf{Z}^\nu$, on peut associer un endomorphisme ζ_a de $\mathcal{F}$ défini par

$$\zeta_a(\alpha_x) = \alpha_{x+a}.$$

Cette application peut être étendue en un automorphisme unique de $\overline{\mathcal{F}}$ que nous noterons de même. D'autre part, $\overline{\mathcal{F}}$ est la limite inductive des $\mathcal{F}(\Lambda)$, où $\Lambda \in \mathrm{F}(\mathbf{Z}^\nu)$ (ensemble des parties finies de $\mathbf{Z}^\nu$), $\mathcal{F}(\Lambda)$ étant construit comme $\mathcal{F}$ en remplaçant *mutatis mutandis* $\mathbf{Z}^\nu$ par Λ.

2. Interactions. — On appelle interaction (¹) une application Φ de $\mathrm{F}(\mathbf{Z}^\nu)$ dans $\overline{\mathcal{F}}$ telle que pour tout $\Lambda \in \mathrm{F}(\mathbf{Z}^\nu)$, $\Phi(\Lambda) \in \mathcal{F}(\Lambda)$ et possédant les propriétés suivantes :

(1) $\forall \Lambda \in \mathrm{F}(\mathbf{Z}^\nu)$, $\Phi(\Lambda)^* = \Phi(\Lambda)$, où * désigne l'involution de $\overline{\mathcal{F}}$;

(2) $\forall \Lambda \in \mathrm{F}(\mathbf{Z}^\nu)$, $\forall a \in \mathbf{Z}^\nu$, $\Phi(\Lambda + a) = \zeta_a(\Phi(\Lambda))$;

(3) $\|\Phi\| = \sum_{0 \in \Lambda \in \mathrm{F}(\mathbf{Z}^\nu)} \|\Phi(\Lambda)\| < +\infty$.

L'ensemble des interactions est noté $\mathcal{B}$; c'est un espace de Banach réel.

On appelle énergie d'interaction de la région finie Λ de $\mathbf{Z}^\nu$, due à l'interaction Φ, l'élément $\mathrm{U}_\Phi(\Lambda) = \sum_{\mathrm{X} \cap \Lambda} \Phi(\mathrm{X})$ de $\mathcal{F}(\Lambda)$.

3. Résultat principal.

Lemme. — $\forall \Phi \in \mathcal{B}$, $\operatorname{ad} U_\Phi(\Lambda)$ (où $[\operatorname{ad} A](B) = AB - BA$) *converge fortement* sur $\mathcal{F}$ *quand* $\Lambda \to \infty$.

Soient $A \in \mathcal{F}(\Lambda)$, où $\Lambda \in F(\mathbf{Z}^\nu)$ et $(\Lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite croissante (i. e. pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1}$) et absorbante pour $\mathbf{Z}^\nu$ $\left(\text{i. e. } \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \Lambda_n = \mathbf{Z}^\nu\right)$, d'éléments de $F(\mathbf{Z}^\nu)$ contenant Λ. Il suffit de démontrer que $([\operatorname{ad} U_\Phi(\Lambda_n)](A))_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy; en effet,

$$\| [\operatorname{ad} U_\Phi(\Lambda_{n+p})](A) - [\operatorname{ad} U_\Phi(\Lambda_n)](A) \|$$

$$\leq \sum_{\substack{X \cap (\Lambda_{n+p} - \Lambda_n) \neq \emptyset \\ X \cap \Lambda \neq \emptyset}} \| [\Phi(X), A]_- \| \leq 2 \| A \| \sum_{\substack{X \cap (\Lambda_{n+p} - \Lambda_n) \neq \emptyset \\ X \cap \Lambda \neq \emptyset}} \| \Phi(X) \|$$

puisque si $M \cap N = \emptyset$, les éléments de $\mathcal{F}(M)$ commutent avec ceux de $\mathcal{F}(N)$ [([2]), 2.2.5]. La finitude de $\|\Phi\|$ permet de rendre aussi petit que l'on veut le membre de droite de ces inégalités, pourvu que n soit suffisamment grand.

Théorème. — $\forall \Phi \in \mathcal{B}$, $\tau_\Phi(t) = \lim_{\Lambda \to \infty} e^{it \operatorname{ad} U_\Phi(\Lambda)}$ *existe* et $\{\tau_\Phi(t) \mid t \in \mathbf{R}\}$ *est un groupe d'automorphismes de* $\overline{\mathcal{F}}$, *fortement continu en* t.

Ce théorème est la conséquence immédiate du lemme précédent, et du fait que, si $(U_\Phi(\Lambda))$ est une famille d'éléments hermitiens telle que $\forall \Lambda \in F(\mathbf{Z}^\nu)$, $U_\Phi(\Lambda) \in \mathcal{F}(\Lambda)$ et que $(\operatorname{ad} U_\Phi(\Lambda))_\Lambda$ converge fortement sur un sous-ensemble dense de $\overline{\mathcal{F}}$, alors $e^{it \operatorname{ad} U_\Phi(\Lambda)}$ converge vers $\tau_\Phi(t)$ sur $\overline{\mathcal{F}}$ [*cf.* ([3])]. Cette convergence étant uniforme sur tout intervalle borné de $\mathbf{R}$ [([4]), démonstration du théorème 4.1], τ_Φ est fortement continu.

(*) Séance du 17 mars 1969.

([1]) D. W. Robinson, *Comm. Math. Phys.*, 7, 1968, p. 337.
([2]) J. Manuceau et J.-C. Trotin, *On Lattice Spin Systems*, Preprint, Marseille, 1968.
([3]) F. Jelinek, *Comm. Math. Phys.*, 9, 1968, p. 169.
([4]) H. F. Trotter, *Pacific J. Math.*, 8, 1958, p. 887.

(*Centre de Physique théorique, C. N. R. S.,*
31, *chemin Joseph-Aiguier,*
13-*Marseille*, 9e,
Bouches-du-Rhône.)