PHYSIQUE THÉORIQUE. — *États quasi libres.* Note (*) de

MM. **Jérôme Manuceau** et **André Verbeure**, présentée par M. Alfred Kastler.

Nous étudions les états quasi libres des fermions et ceux des bosons. Nous construisons les représentations correspondantes et montrons que les états quasi libres purs sont les états de Fock.

1. États quasi libres des fermions. — Pour la C^*-algèbre des relations d'anticommutation et ses états quasi libres, nous adoptons les notations de [1]. Les états quasi libres ω_A sont en bijection avec les opérateurs r-linéaires A de l'espace de Hilbert réel (H, s) (l'espace monoparticulaire muni de sa structure réelle où s est la partie réelle du produit scalaire hermitien) satisfaisant à $A^+ = -A$ et $\| A \| \leq 1$ au moyen de la relation

$$(1) \qquad \omega_A(B(\psi)\,B(\varphi)) = s(\psi, \varphi) + is(A\psi, \varphi) \qquad (\psi \text{ et } \varphi \in H),$$

où $B(\psi) = [\psi] + [\psi^*]$ est la somme d'un créateur et d'un annihilateur d'une particule dans l'état ψ.

Les états quasi libres purs correspondent aux opérateurs A vérifiant $A^2 = -I$ [i. e. permettant de définir sur (H, s) une structure d'espace de Hilbert complexe de produit scalaire (1)]. On a :

Théorème 1. — *Si* A_1 *et* A_2 *sont deux telles structures complexes de* (H, s) *il existe un automorphisme monoparticulaire* τ_T [*i. e. un automorphisme induit par un opérateur orthogonal* T *de* (H, s)] *tel que* $\omega_{A_1} = \omega_{A_2} \circ \tau_T$.

Nous désignons par π_A la représentation obtenue par la construction de Guelfand-Naimark à partir de l'état quasi libre ω_A dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_A$ et par Ω_A le vecteur cyclique correspondant.

Théorème 2. — *Dans le cas général, soit* $A = J.|A|$ *la décomposition polaire de* A [J *fournit alors une structure complexe de* (H, s)]. *Posons* $T_1 = 2^{-1/2}(I + |A|)^{1/2}$, $T_2 = 2^{-1/2}(I - |A|)^{1/2}$; π_A *est alors la composante cyclique de la représentation* π *définie dans* $\mathcal{H}_J \otimes \mathcal{H}_J$ *par*

$$\pi(B(\psi)) = \pi_J(B(T_1\psi)) \otimes 1 + 0 \otimes \pi_{-J}(B(T_2\psi)), \qquad \psi \in H$$

pour le vecteur $\Omega_J \otimes \Omega_J$ (π_J *et* π_{-J} *sont les « représentations de Fock » correspondant respectivement aux structures complexes* J *et* $-$J).

2. États quasi libres des bosons. — La C^*-algèbre abstraite $\overline{\Delta(H, \sigma)}$, sur l'espace symplectique (H, σ), engendrée par les opérateurs de Weyl (i. e. $\exp\{i\,B(\psi)\}$, où $B(\psi)$ désigne l'opérateur de champ] a été décrite dans [2] tandis que les états quasi libres des opérateurs de champ le sont dans [3]. Les classes d'états quasi libres ω_s de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$, qui se déduisent les uns des autres par composition avec un automorphisme de jauge de

seconde espèce, sont en bijection avec les produits scalaires réels s de H, vérifiant $|\sigma(\psi, \varphi)|^2 \leq s(\psi, \psi)\, s(\varphi, \varphi)$, ψ et $\varphi \in$ H, au moyen de la relation

$$\omega_s(\delta_\psi)) = \exp\left\{-\frac{1}{2} s(\psi, \psi)\right\}, \qquad \psi \in \mathrm{H}.$$

On désignera par π_s la représentation associée à ω_s dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_s$ et par Ω_s le vecteur cyclique correspondant.

Sans perdre en généralité, il est loisible de supposer que H est complet pour la norme $\|\psi\|_s = s(\psi, \psi)^{1/2}$, mais l'extension de σ au complété n'est pas nécessairement régulière.

THÉORÈME 3. — *ω_s est état pur, si et seulement si $s^{-1}\sigma = -\sigma^{-1}s$ (ce qui implique la régularité de σ). Posant alors $\mathrm{A}_s = -s^{-1}\sigma$, A_s est une structure hilbertienne « σ-permise » de (H, σ)* [4].

THÉORÈME 4. — *Si A_{s_1} et A_{s_2} désignent deux structures hilbertiennes σ-permises de (H, σ), il existe un automorphisme monoparticulaire τ_T de $\overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)}$ [où T est un opérateur symplectique de (H, σ)] tel que $\omega_{s_1} = \omega_{s_2} \circ \tau_\mathrm{T}$.*

THÉORÈME 5. — *Supposant (H, s) complet et σ régulière, soit $\mathrm{A}_s = \mathrm{J}.|\mathrm{A}_s|$ la décomposition polaire de A_s [non nécessairement borné par rapport à la norme $s(\psi, \psi)^{1/2}$]. Posons $\mathrm{T}_1 = 2^{-1/2}(|\mathrm{A}_s| + 1)^{1/2}$, $\mathrm{T}_2 = 2^{-1/2}\Lambda(|\mathrm{A}_s| - 1)^{1/2}$ où Λ est un opérateur linéaire de H tel que $[\Lambda, \mathrm{J}]_+ = 0$ et $\Lambda^2 = 1$; π_s est alors la composante cyclique de la représentation (factorielle) π définie dans $\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_s$ par*

$$\pi(\delta_\psi) = \pi_\mathrm{J}(\delta_{\mathrm{T}_1\psi}) \otimes \pi_\mathrm{J}(\delta_{\mathrm{T}_2\psi}), \qquad \psi \in \mathrm{H}$$

pour le vecteur $\Omega_\mathrm{J} \otimes \Omega_\mathrm{J}$ (π_J est la « représentation de Fock » correspondant à la structure complexe J). π_s est donc elle-même factorielle.

THÉORÈME 6. — *Lorsque σ n'est pas régulière, π_s n'est pas une représentation factorielle.*

Pour les démonstrations détaillées, nous renvoyons à :

— *Representation of anticommutation relations* (E. BALSLEV, J. MANUCEAU, A. VERBEURE, Prépublication Marseille);

— *Quasi-free states of the C. [C. R. Algebra* (J. MANUCEAU, A. VERBEURE, Prépublication Marseille).

(*) Séance du 18 décembre 1967.

[1] E. BALSLEV et A. VERBEURE, *States on Clifford Algebras* (Prépublication).

[2] J. MANUCEAU, *C*-algèbre des relations de commutation* (*Ann. Inst. H. Poincaré*, Vol. VIII, 2, 1968, p. 139-161).

[3] D. W. ROBINSON, *Commun. math. Phys.*, 1, 1965, p. 159-174.

[4] D. KASTLER, *Commun. math. Phys.*, 1, 1965, p. 16-18.

(*Service de Physique théorique, Faculté des Sciences, place Victor-Hugo, Marseille, 3e, Bouches-du-Rhône*).